MATEMATIKA

Ortocetrični tetraedar

Vladimir Volenec[1]

U Nagradnom natječaju br. 224 u broju 273 MFL-a tražilo se da se za tetraedar $ABCD$ s duljinama bridova $|AB| = 3$, $|BC| = 7$, $|CD| = 11$, $|DA| = 9$ dokaže da su bridovi AC i BD okomiti.

Savjetujemo čitatelju da skicira odgovarajuće slike.

Služeći se skalarnim produktom vektora možemo vrlo elegantno dokazati da su bridovi AC i BD okomiti ako i samo ako za duljine bridova vrijedi jednakost

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2, \tag{1}$$

a ona je u slučaju prethodnog nagradnog zadatka ispunjena jer je $9 + 121 = 81 + 49$.

Doista, ako vektore $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ označimo s $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, dobivamo

$$|AB|^2 + |CD|^2 = (\mathbf{b} - \mathbf{a})^2 + \mathbf{c}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

$$|BC|^2 + |AD|^2 = (\mathbf{c} - \mathbf{b})^2 + \mathbf{a}^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 - 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c},$$

pa je jednakost (1) ekvivalentna s $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$, tj. $(\mathbf{c} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = 0$, a to je ekvivalentno okomitosti vektora $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{DB}$.

Dokazani rezultat možemo ovako kratko zabilježiti

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2 \iff AC \perp BD. \tag{2}$$

Zamijenimo li u ovoj tvrdnji uloge slovima B i C odnosno C i D, imamo još dvije analogne tvrdnje

$$|AC|^2 + |BD|^2 = |AD|^2 + |BC|^2 \iff AB \perp CD, \tag{3}$$

$$|AB|^2 + |CD|^2 = |AC|^2 + |BD|^2 \iff AD \perp BC. \tag{4}$$

Od tri jednakosti na lijevim stranama ovih triju ekvivalentnosti svake dvije povlače onu preostalu, pa zato isto vrijedi i za tri okomitosti na desnim stranama ovih ekvivalentnosti, tj. dokazali smo ovaj lijepi rezultat:

Teorem 1. *Ako tetraedar ima dva para međusobno okomitih suprotnih bridova, tada mu je i treći par suprotnih bridova okomit.*

Pravilni tetraedar, kojemu svi bridovi imaju jednake duljine, očito zadovoljava sve tri promatrane jednakosti, pa su mu zato svaka dva suprotna brida okomita. Isto vrijedi i za svaku pravilnu trostranu piramidu, koja je jedna posebna vrsta tetraedra.

Za bilo koji tetraedar promatrane jednakosti ne moraju biti ispunjene. Uvjerimo se u to! Izaberimo trokut ABC s tri stranice različitih duljina. Ako u središtu O tom trokutu opisane kružnice podignemo okomicu na ravninu trokuta ABC i na njoj odaberemo bilo koju točku D, koja ne leži u toj ravnini, tada je ona jednako udaljena od točaka A, B,

---

[1] Autor je profesor emeritus na Matematičkom odsjeku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Zagrebu; e-pošta: `vlado.volenec1@optinet.hr`

C i tetraedar $ABCD$ očito ima tri nejednake sume kvadrata duljina suprotnih bridova. To znači da postoje tetraedri, u kojima nema okomitih suprotnih bridova.

U ravnini je najjednostavniji lik trokut, a u prostoru je najjednostavnije tijelo tetraedar. Ova dva objekta imaju neka vrlo slična svojstva. Tako se, na primjer, svaki poligon može rastaviti na trokute, a svaki se poliedar može rastaviti na tetraedre.

Svaki trokut ima mnogo zanimljivih točaka. Težišnice trokuta sijeku se u jednoj točki, koju zovemo težištem tog trokuta, i ona te težišnice dijeli u omjeru $2:1$. Postoji jedinstvena točka jednako udaljena od vrhova trokuta i to je središte opisane mu kružnice. Isto tako postoji jedinstvena točka jednako udaljena od stranica tog trokuta i to je središte upisane mu kružnice.

I svaki tetraedar ima točke sa sličnim svojstvima. Težišnice tetraedra sijeku se u jednoj točki, koju zovemo težištem tog tetraedra, i ona ih dijeli u omjeru $3:1$. Postoji jedinstvena točka jednako udaljena od vrhova tetraedra i to je središte tom tetraedru opisane sfere. Isto tako postoji jedinstvena točka jednako udaljena od strana tog tetraedra i to je središte tom tetraedru upisane sfere.

Trokut ima još jednu zanimljivu točku. Naime, njegove se tri visine sijeku u jednoj točki, koju zovemo ortocentrom tog trokuta. Međutim, bilo bi preuranjeno zaključiti da se i četiri visine tetraedra sijeku u jednoj točki. Vidjet ćemo kasnije da to općenito nije istina.

Da bismo razjasnili ovo pitanje, potrebne su nam neke činjenice iz stereometrije.

Dva pravca a i b u prostoru, koji ne leže u istoj ravnini, zovemo mimoilazni pravci. Oni sigurno nisu paralelni, jer bi inače ležali u istoj ravnini. Ako su $\mathbf{a}$ i $\mathbf{b}$ neki vektori paralelni s tim pravcima i različiti od nul-vektora $\mathbf{0}$, tada je njihov vektorski produkt $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ okomit na oba ta vektora, pa zato i na oba pravca a i b. Ako sada kroz svaku točku pravca a povučemo pravac paralelan s vektorom $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, tada svi takvi pravci tvore jednu ravninu α, koju tada pravac b probada u nekoj točki B. Od onih pravaca u ravnini α, koji su paralelni s vektorom $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, označimo s c onaj pravac koji prolazi kroz točku B. To je jedini od tih promatranih pravaca, koji siječe pravac b. On siječe oba pravca a i b i okomit je na njih. Kažemo tada da je c zajednička okomica mimoilaznih pravaca a i b. Dakle, imamo zaključak:

Lema 1. *Svaka dva mimoilazna pravca u prostoru imaju jednu jedinu zajedničku okomicu.*

Trebat će nam i sljedeća tvrdnja.

Lema 2. *Ako tri različita pravca p, q, r u prostoru imaju svojstvo da se svaka dva od njih sijeku, tada se ili sva tri pravca sijeku u istoj točki ili sva tri leže u jednoj ravnini.*

Dokaz. Pretpostavimo da se pravci p i q sijeku u točki O. Ako pravac r ne prolazi kroz točku O, tada su njegova sjecišta P i Q s pravcima p i q točke različite od točke O i različite međusobno, pa pravac $r = PQ$ leži u ravnini pq. $\square$

Višestrukom primjenom leme 2 slijedi da ista tvrdnja vrijedi i za četiri ili više pravaca u prostoru.

Dokažimo sada:

Teorem 2. *Dvije visine AA' i BB' tetraedra $ABCD$ sijeku se u jednoj točki ako i samo ako su bridovi AB i CD okomiti.*

Dokaz. Ako se visine AA' i BB' sijeku u jednoj točki U, tada je ravnina ABU okomita na ravninu BCD jer prolazi kroz visinu AA' na tu ravninu, a isto je tako ravnina ABU okomita i na ravninu ACD jer prolazi kroz visinu BB' na tu ravninu. Dakle, ravnina ABU je okomita na obje ravnine ACD i BCD, pa je onda okomita i na njihovu presječnicu, tj. pravac CD. Kako je pravac CD okomit na ravninu ABU, to je on okomit i na pravac AB u toj ravnini. Dakle, pravci AB i CD su okomiti. Obrnuto, pretpostavimo sada da su pravci AB i CD okomiti. Neka je PQ njihova zajednička okomica, pri čemu točka P leži na pravcu AB, a Q na CD. Tada je pravac CD okomit na pravce AB i PQ, pa je zato okomit i na ravninu ABP kroz ta dva pravca. Ravnine ACD i BCD, koje prolaze kroz pravac CD okomit na ravninu ABP, okomite su na ravninu ABP. Neka su sada AA' i BB' visine trokuta ABP i U njihovo sjecište, tj. ortocentar tog trokuta. Pravac AA' okomit je na pravac BP u ravnini BCD, pa je okomit na tu ravninu, a to znači da je AA' visina tetraedra $ABCD$. Isto tako je pravac BB' okomit na pravac AP u ravnini ACD, pa je okomit na tu ravninu, a to znači da je i BB' visina tetraedra $ABCD$. Dakle, visine AA' i BB' tetraedra $ABCD$ sijeku se u točki U. $\square$

U prethodnom dokazu se sjecište U visina AA' i BB' tetraedra $ABCD$ nalazi i na trećoj visini PQ trokuta ABP, a to je zajednička okomica bridova AB i CD. Kako je odnos $AB \perp CD$ simetričan za oba brida AB i CD, iz teorema 2 slijedi:

Teorem 3. *Ako se dvije visine AA' i BB' tetraedra $ABCD$ sijeku u jednoj točki U, tada su bridovi AB i CD tog tetraedra međusobno okomiti i visine CC' i DD' tog tetraedra se također sijeku u jednoj točki V i pritom točke U i V leže na zajedničkoj okomici bridova AB i CD.*

Ako tetraedar $ABCD$ ima okomite bridove AB i CD, ali mu ostali parovi suprotnih bridova nisu okomiti, tada mu se visine AA' i BB' sijeku u jednoj točki U, a visine CC' i DD' mu se sijeku u nekoj točki V, a ostali parovi njegovih visina se zbog teorema 2 ne mogu sjeći, što znači da su tada točke U i V nužno različite.

Ako tetraedar $ABCD$ ima bar dva para okomitih suprotnih bridova, a tada su mu po teoremu 1 sva tri para suprotnih bridova okomita, onda mu se svake dvije visine sijeku. Po lemi 2 i napomeni iza nje te četiri visine se ili sijeku u istoj točki ili leže u jednoj ravnini. Međutim, pokazat ćemo da druga mogućnost ovdje nije moguća. Prema dokazu teorema 2 pravci AA' i BB' se sijeku u ortocentru U trokuta ABP, a pravac CD je okomit na ravninu ABP, pa barem jedna od točaka C i D ne leži u toj ravnini. Neka je to, na primjer, točka C. Tada ni visina CC' ne može ležati u ravnini ABP. Dokazali smo:

Teorem 4. *U tetraedru se sve četiri visine sijeku u jednoj točki ako i samo ako su mu svaka dva para suprotnih bridova okomita.*

Tetraedar sa svojstvom da mu se sve četiri visine sijeku u jednoj točki H zovemo ortocentričnim tetraedrom, a točku H zovemo ortocentrom tog tetraedra. Tetraedar sa samo jednim parom suprotnih bridova, kojemu se dvije visine sijeku u jednoj točki U, a druge dvije u drugoj točki V, zovemo semiortocentričnim (tj. poluortocentričnim) tetraedrom.

Pravilni tetraedar je očito ortocentričan, a isto vrijedi i za svaku pravilnu trostranu piramidu. Ortocentričan je i takozvani tropravokutni tetraedar $ABCD$, kojemu su bridovi AB, AC i AD međusobno okomiti. Njemu se ortocentar podudara s vrhom A. Osim ovih vrlo posebnih tetraedara ima i općenitijih, koji su ortocentrični. Doista, ako je ABC bilo koji trokut s ortocentrom H i ako je D bilo koja točka na pravcu, koji je u točki H okomit na ravninu ABC, i ako točka D ne leži u toj ravnini, tada je, na primjer, ravnina DAH okomita na ravninu ABC, pa zato i na pravac BC u njoj. Dakle, pravac

BC je okomit na ravninu DAH, pa zato i na pravac AD u njoj. Slično se pokazuje da su i pravci AC i BD okomiti.

U drugom dijelu dokaza teorema 2 vidjeli smo da je ravnina ABP okomita na ravninu BCD i da je visina AA' tetraedra $ABCD$ također okomita na ravninu BCD, pa visina AA' leži u ravnini ABP i zato točka A' leži na presječnici BP tih dviju ravnina, koja je okomita na brid CD jer leži u ravnini ABP okomitoj na taj brid. To zapravo znači da je BP visina trokuta BCD i da nožište A' visine AA' tetraedra $ABCD$ leži na visini BP trokuta BCD. Ovo razmatranje, u kojem smo gledali visinu AA' i par okomitih bridova AB i CD, mogli bismo u slučaju ortocentričnog tetraedra ponoviti za visinu AA' i par okomitih bridova AC i BD, pa zaključiti da nožište A' visine AA' tetraedra $ABCD$ leži na visini CP trokuta BCD, tj. da je točka A' ortocentar tog trokuta. Umjesto visine AA' mogli bismo promatrati i ostale visine ortocentričnog tetraedra i doći do sličnog zaključka. Vrijedi:

Teorem 5. *Nožišta visina ortocentričnog tetraedra iz njegovih pojedinih vrhova su ortocentri njima suprotnih strana tog tetraedra.*

U slučaju tetraedra $ABCD$ s okomitim bridovima AB i CD iz dokaza teorema 2 točke U i V leže na zajedničkoj okomici PQ tih bridova. Ako je tetraedar $ABCD$ ortocentričan, tada je $U = V$, pa imamo ovaj zaključak:

Teorem 6. *Zajedničke okomice parova suprotnih bridova ortocentričnog tetraedra prolaze kroz njegov ortocentar.*

U spomenutom dokazu teorema 2 je zajednička okomica PQ bridova AB i CD imala nožište P na bridu CD i ta točka P je bila i nožište visina AP i BP u trokutima ACD i BCD. Uz analogno zaključivanje za ostale parove suprotnih bridova ortocentričnog tetraedra imamo ovaj rezultat:

Teorem 7. *Nožišta zajedničkih okomica parova suprotnih bridova ortocentričnog tetraedra su ujedno i nožišta okomica visina pojedinih strana tog tetraedra na tim bridovima.*

Dokažimo još nekoliko zanimljivih svojstava ortocentričnog tetraedra. Spojnica polovišta suprotnih bridova tetraedra zove se srednjica tog tetraedra i on ima tri srednjice.

Teorem 8. *Srednjice ortocentričnog tetraedra imaju jednake duljine i prolaze kroz njegovo težište, koje ih raspolavlja.*

Dokaz. Označimo s P_{XY} polovište brida XY za svako $X,\ Y \in \{A, B, C, D\}$, $X \neq Y$. Srednjice $\overline{P_{AC}P_{BC}}$ i $\overline{P_{AD}P_{BD}}$ trokutâ ABC i ABD su paralelne s njihovom zajedničkom stranicom AB, a srednjice $\overline{P_{AC}P_{AD}}$ i $\overline{P_{BC}P_{BD}}$ trokutâ ACD i BCD su paralelne s njihovom zajedničkom stranicom CD. Kako su bridovi AC i BD okomiti, to znači da je četverokut $P_{AC}P_{BC}P_{BD}P_{AD}$ pravokutnik, pa mu dijagonale $\overline{P_{AC}P_{BD}}$ i $\overline{P_{AD}P_{BC}}$ imaju jednake duljine. Slično se pokazuje da i treća srednjica $\overline{P_{AB}P_{CD}}$ ima duljinu jednaku duljinama prethodnih dviju. Ako radijusvektore točaka A, B, C, D s obzirom na bilo koju točku O prostora kao ishodište označimo redom s $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, tada težište G tetraedra $ABCD$ ima radijusvektor $\frac{1}{4}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d})$, a točke P_{AB} i P_{CD} radijusvektore $\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$ i $\frac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d})$. Kako je $\frac{1}{4}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) + \frac{1}{2}(\mathbf{c}+\mathbf{d})$, točka G je u polovištu točaka P_{AB} i P_{CD}, tj. polovište srednjice $\overline{P_{AB}P_{CD}}$, a isto vrijedi i za ostale dvije srednjice. (Za ovaj posljednji dio dokaza nije nam trebala činjenica da je tetraedar ortocentričan, pa težište svakog tetraedra raspolavlja svaku njegovu srednjicu.) $\square$

Prisjetimo se još nekih zanimljivih svojstava trokuta. Poznato je da polovišta stranica, nožišta visina i polovišta dužina, koje spajaju ortocentar s vrhovima trokuta, leže na jednoj kružnici, kojoj je središte polovište ortocentra i središta opisane kružnice, a polumjer joj je jednak polovini polumjera opisane kružnice trokuta. Dobivena kružnica je tzv. Eulerova kružnica ili kružnica 9 točaka promatranog trokuta.

Pokazat ćemo da u ortocentričnom tetraedru postoje čak dvije sfere, koje na sebi imaju po 12 istaknutih točaka tog tetraedra, i po svojim svojstvima podsjećaju na Eulerovu kružnicu trokuta.

Teorem 9. *U ortocentričnom tetraedru polovišta bridova i nožišta zajedničkih okomica parova suprotnih bridova leže na jednoj sferi sa središtem u težištu tog tetraedra.*

Dokaz. Iz teorema 8 slijedi da je težište G ortocentričnog tetraedra $ABCD$ središte sfere, koja prolazi kroz polovišta njegovih bridova. Presjeci te sfere s pojedinim stranama tog tetraedra su očito Eulerove kružnice tih strana, koje prolaze kroz nožišta visina tih strana, pa ona leže i na dobivenoj sferi, a po teoremu 7 nožišta visina strana su nožišta zajedničkih okomica parova suprotnih bridova tetraedra. $\square$

Sfera iz teorema 9 zove se prva Eulerova sfera ili prva sfera 12 točaka ortocentričnog tetraedra.

Teorem 10. *Težište ortocentričnog tetraedra je polovište njegovog ortocentra i središta opisane mu sfere.*

Dokaz. Neka su H, G i O redom ortocentar, težište i središte opisane sfere ortocentričnog tetraedra $ABCD$, a H_A, N_A i O_A redom ortocentar, središte Eulerove kružnice i središte opisane kružnice trokuta ABC. Znamo da je točka N_A polovište točaka H_A i O_A, a po teoremu 5 je točka H_A nožište A' visine AA' tetraedra $ABCD$. Zato je pravac HH_A okomit na ravninu BCD. Kako prva Eulerova i opisana sfera tetraedra sijeku ravninu BCD po Eulerovoj i opisanoj kružnici trokuta BCD, slijedi da su i pravci GN_A i OO_A okomiti na ravninu BCD. Točke H_A, N_A i O_A leže na Eulerovom pravcu trokuta BCD, pa zato tri okomice HH_A, GN_A i OO_A na ravninu BCD leže u jednoj ravnini, a to je ravnina α kroz pravac OA okomita na ravninu BCD. Točke H, G i O leže u toj ravnini. Analogno možemo dokazati da točke H, G i O leže i u ravnini β kroz pravac OB okomitoj na ravninu ACD, pa zato leže i na pravcu $\alpha \cap \beta$. Kako je točka N_A polovište točaka H_A i O_A, točka G je polovište između točaka H i O. $\square$

Teorem 11. *U ortocentričnom tetraedru ABCD, s ortocentrom H i središtem O opisane sfere, na jednoj sferi leže težišta i ortocentri njegovih strana i četiri točke, koje dijele dužine* $\overline{HA}$, $\overline{HB}$, $\overline{HC}$ *i* $\overline{HD}$ *u omjeru* $1:2$. *Središte N te sfere dijeli dužinu* $\overline{HO}$ *u omjeru* $|HN|:|NO| = 1:2$, *a polumjer te sfere jednak je jednoj trećini polumjera opisane sfere tog tetraedra.*

Dokaz. Ako je G težište tetraedra $ABCD$ i G_A, G_B, G_C, G_D težišta strana BCD, ACD, ABD, ABC, vrijede jednakosti

$$|AG|:|GG_A| = |BG|:|GG_B| = |CG|:|GG_C| = |DG|:|GG_D| = 3:1.$$

Zato homotetija s centrom G i koeficijentom $-\frac{1}{3}$ preslikava točke A, B, C, D redom u točke G_A, G_B, G_C, G_D, pa zato opisanu sferu tetraedra $ABCD$ sa središtem O i polumjerom R preslikava u sferu s polumjerom $\frac{1}{3}R$ i središtem u točki N, koja leži na pravcu GO i ima svojstvo $|GN| : |GO| = -\frac{1}{3}$. Homotetija s centrom H i koeficijentom $\frac{1}{3}$ preslikava točke A, B, C, D redom u točke, koje dijele dužine $\overline{HA}$, $\overline{HB}$, $\overline{HC}$ i $\overline{HD}$ u omjeru $1 : 2$. Zato ta homotetija preslikava opisanu sferu tetraedra $ABCD$ u sferu s polumjerom $\frac{1}{3}R$ i središtem u točki N', koja leži na pravcu HO i ima svojstvo $|HN'| : |HO| = \frac{1}{3}$. Tvrdnja teorema će biti dokazana ako pokažemo da se točke N i N' podudaraju. To je vrlo lako dokazati. Iz teorema 10 znamo da je točka O polovište dužine $\overline{HO}$. Podijelimo li ju na šest jednakih dijelova, točka G je na sredini, a druga diobena točka M (računajući od H prema O) zadovoljava svojstva točaka N i N' na dužini $\overline{HO}$, tj. vrijede jednakosti $|HM| : |HO| = \frac{1}{3}$ i $|GM| : |GO| = -\frac{1}{3}$. $\square$

Sfera iz teorema 11 zove se druga Eulerova sfera ili druga sfera 12 točaka ortocentričnog tetraedra.

Skup od četiri različite točke A, B, C, D u ravnini, od kojih nikoje tri nisu kolinearne, zove se četverovrh, a pravci AB, AC, AD, BC, BD i CD su mu stranice, pri čemu su AB, CD; AC, BD; AD, BC parovi suprotnih stranica. Vrhovi trokuta i njegov ortocentar (osim u slučaju pravokutnog trokuta) tvore takozvani ortocentrični četverovrh, koji ima svojstvo da su mu svake dvije suprotne stranice okomite i da mu je svaki vrh ortocentar za trokut s vrhovima u preostala tri vrha tog četverovrha.

Analogno tome, skup od pet različitih točaka A, B, C, D, E u prostoru, od kojih nikoje tri ne leže na istom pravcu i nikoje četiri ne leže u istoj ravnini, zove se peterovrh. On ima 10 bridova $AB, \ldots, DE$ i 10 strana $ABC, \ldots, CDE$, pri čemu su, na primjer, brid AB i strana CDE suprotni. Vrhovi tetraedra i njegov ortocentar (osim u slučaju tropravokutnog tetraedra) tvore takozvani ortocentrični peterovrh, koji ima svojstvo da mu je svaki brid okomit na suprotnu stranu, da su mu svaka dva brida bez zajedničkih vrhova okomita i da mu je svaki vrh ortocentar za tetraedar s vrhovima u preostala četiri vrha tog peterovrha.

Ako je trokut ABC šiljastokutan, njegov ortocentar D leži unutar njega, a ako je trokut tupokutan s tupim kutom A, njegov ortocentar D leži izvan njega, ali je sada trokut BCD šiljastokutan, a njegov ortocentar A leži unutar njega. Dakle, svaki ortocentrični četverovrh s različitim vrhovima ima vrhove raspoređene u obliku šiljastokutnog trokuta i njegovog ortocentra unutar tog trokuta, tj. sigurno nema oblik konveksnog četverokuta. Zato vrhovi tog četverovrha ne mogu ležati na jednoj elipsi, niti na jednoj paraboli. Dakle, svaka krivulja 2. reda kroz vrhove takvog četverovrha je nužno hiperbola, za koju kažemo da je opisana tom četverovrhu odnosno da joj je taj ortocentrični četverovrh upisan.

Pogodnim izborom pravokutnog koordinatnog sustava možemo postići da je središte hiperbole u ishodištu, a da su asimptote te hiperbole os ordinata s jednadžbom $x = 0$ i neki pravac kroz ishodište s jednadžbom oblika $y = kx$. Ta hiperbola ima jednadžbu oblika $x(y - kx) = m$, pri čemu je $m \neq 0$, jer bi inače ona prikazivala par pravaca. Doista, ova se jednadžba može pisati u obliku

$$y = kx + \frac{m}{x},$$

pa se vidi da iz $x \to 0$ slijedi $y \to \infty$, a da iz $x \to \infty$, $y \to kx$, pa su pravci s jednadžbama $x = 0$ i $y = kx$ doista asimptote promatrane krivulje 2. reda. U posebnom slučaju kada je $k = 0$ imamo hiperbolu s okomitim asimptotama i jednakim poluosima, koju zovu pravokutnom hiperbolom ili jednakostraničnom hiperbolom. Usvojit ćemo prvi naziv jer je okomitost asimptota važnije svojstvo te hiperbole, a taj je naziv u upotrebi u literaturi na engleskom jeziku.

U geometriji nas zanimaju samo oblici objekata i njihovi međusobni odnosi, a ne njihove stvarne veličine (na primjer mi ćemo reći da je Mount Everest visok 8848 metara, a da je Dinara (najviši vrh Hrvatske) visoka 1831 metar, dok će Amerikanci i Englezi reći da su ti vrhovi visoki 29 029 stopa i 6007 stopa, ali ćemo i mi i oni reći da je Mount Everest otprilike 5 puta viši od Dinare). Zato bez štete po općenitost možemo prethodnu jednadžbu hiperbole pisati u obliku $x(y-kx)=1$, ili u eksplicitnom obliku

$$y = kx + \frac{1}{x}. \tag{5}$$

Svaki pravac s jednadžbom $x = a$ siječe tu hiperbolu u jednoj jedinoj točki A s ordinatom

$$y = ka + \frac{1}{a}.$$

To znači da različite točke na toj hiperboli imaju različite apscise.

Može li se ortocentrični četverovrh $ABCD$ upisati hiperboli i pod kojim uvjetima? Neka su

$$A = \Big(a, ka + \frac{1}{a}\Big), \quad B = \Big(b, kb + \frac{1}{b}\Big), \quad C = \Big(c, kc + \frac{1}{c}\Big), \quad D = \Big(d, kd + \frac{1}{d}\Big)$$

četiri različite točke na hiperboli s jednadžbom (5). Brojevi a, b, c, d su različiti od nule i različiti međusobno. Razlika ordinata točaka B i A je jednaka

$$kb - ka + \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \Big(k - \frac{1}{ab}\Big)(b-a),$$

a razlika njihovih apscisa je jednaka $b-a$, pa pravac AB ima koeficijent smjera $k - \dfrac{1}{ab}$. Pravac CD ima koeficijent smjera $k - \dfrac{1}{cd}$, pa su pravci AB i CD okomiti pod uvjetom

$$\Big(k - \frac{1}{ab}\Big)\Big(k - \frac{1}{cd}\Big) = -1,$$

koji se može pisati i u obliku

$$k^2 - \frac{k}{abcd}(ab+cd) + \frac{1}{abcd} + 1 = 0. \tag{6}$$

Pravci AC i BD su okomiti pod uvjetom

$$k^2 - \frac{k}{abcd}(ac+bd) + \frac{1}{abcd} + 1 = 0, \tag{7}$$

a slično izgleda i uvjet za okomitost pravaca AD i BC. Jednakosti (6) i (7) su identične ako je $k=0$, a kada bi bilo $k \neq 0$, iz njih bi imali $ab+cd = ac+bd$, što se može pisati i u obliku $(a-d)(b-c)=0$, pa bi moralo biti ili $a=d$ ili $b=c$, što nije istina. Time smo dokazali ovaj rezultat:

Teorem 12. *Svaka krivulja 2. reda opisana ortocentričnom četverovrhu je pravokutna hiperbola.*

Svaka krivulja 2. reda kroz vrhove nepravokutnog trokuta i njegov ortocentar je, dakle, pravokutna hiperbola.

Uvjet (6) zbog $k=0$ dobiva oblik $abcd = -1$, pa imamo i ovaj usputni rezultat:

Korolar. *Četiri različite točke* $A = \left(a, \frac{1}{a}\right)$, $B = \left(b, \frac{1}{b}\right)$, $C = \left(c, \frac{1}{c}\right)$, $D = \left(d, \frac{1}{d}\right)$ *na pravokutnoj hiperboli s jednadžbom* $xy = 1$ *tvore ortocentrični četverovrh ako i samo ako je* $abcd = -1$.

Može li se nešto zanimljivo reći o visinama tetraedra, koji nije ni ortocentričan, niti semiortocentričan, tj. kojemu su svake dvije visine mimoilazni pravci? Neka je $ABCD$ jedan takav tetraedar i neka su mu a, b, c, d visine iz vrhova A, B, C, D na suprotne strane, a A', B', C', D' redom ortocentri tih strana BCD, CDA, DAB, ABC, te a', b', c', d' okomice na te strane u tim ortocentrima. Visina a je okomita na ravninu BCD, pa zato i na pravac BC u toj ravnini. Pravac AD' je visina trokuta ABC, pa je i ona okomita na pravac BC. Kako je pravac BC okomit na pravce a i AD' ravnine aD', to je on okomit na tu ravninu. Iz okomitosti ravnine aD' na pravac BC slijedi da je ravnina aD' okomita na ravninu ABC kroz taj pravac, a kako je pravac d' kroz točku D' isto okomit na ravninu ABC, pravac d' leži u ravnini aD', pa sigurno siječe pravac a, jer pravci a i d' nisu paralelni budući da su okomiti redom na ravnine BCD i ABC, koje nisu paralelne. Na isti način se može dokazati da svaki od pravaca a, b, c, d siječe svaki od pravaca a', b', c', d'. Dokazali smo:

Teorem 13. *Ako je* $ABCD$ *tetraedar s međusobno mimoilaznim visinama* a, b, c, d *i ako su* a', b', c', d' *okomice na ravnine njegovih strana* BCD, CDA, DAB, ABC *u ortocentrima tih strana, tada svaki od pravaca* a, b, c, d *siječe svaki od pravaca* a', b', c', d', *a parovi pravaca* a, a'; b, b'; c, c'; d, d' *su paralelni.*

Između različitih vrsta ploha 2. reda posebno je zanimljiva ploha jednoplohi hiperboloid. On je rotacijska ploha oko svoje jedne osi, a ravnine kroz tu os ga sijeku po hiperbolama i sve te međusobno sukladne hiperbole imaju isti centar, koji je ujedno i centar te plohe. Ta ploha na sebi ima dva sustava pravaca sa svojstvom da su svaka dva pravca iz istog sustava mimoilazna, a da se svaka dva pravca iz različitih sustava sijeku, dok je svaki pravac iz jednog sustava paralelan s točno jednim pravcem iz drugog sustava. Ove pravce zovemo izvodnicama jednoplohog hiperboloda. Ako su spomenute presječne hiperbole pravokutne hiperbole, tada imamo takozvani pravokutni hiperboloid.

Moglo bi se dokazati da su u situaciji iz teorema 13 pravci a, b, c, d i a', b', c', d' izvodnice jednog pravokutnog hiperboloida sa središtem u točki S, koja je simetrična središtu O opisane sfere s obzirom na težište G tetraedra $ABCD$ (u slučaju ortocentričnog tetraedra ta bi se točka S podudarala s njegovim ortocentrom H, a pravci a, b, c, d bi prolazili kroz taj ortocentar i pritom bi bilo još i $a = a'$, $b = b'$, $c = c'$, $d = d'$). Međutim, dokaz bi zahtijevao mnogo jača sredstva od onih koje smo ovdje koristili. Možemo uočiti da su odnosi u teoremu 13 donekle analogni onima u teoremu 12.